ÉNONCÉ

- Lem : si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (entière), f ne s'annule pas, $\exists F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f = e^F$.

Th :

- Soit X, Y VA indé à val ds $\mathbb{N}$ tq $Z := X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

  $\rightarrow$ X et Y suivent aussi des lois de Poisson.

LEÇONS.

245

243

264

RÉFS.

Queffelec² : Analyse complexe et applis p. 425 / p. 209.

COMMENTAIRES

⚠ Lem2 (voir après) dans la réf parle d'un " O( ) ". Il s'agit du O( ) au sens des polynômes (troncature) et non au sens des compt. asymptotique.

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. Lem 2

- $A(R) := \sup_{|z|=R} \mathrm{Re}(f(z))$ $\quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

① $\forall n \geq 1$, $R > 0$, $|a_n| \leq 2 \dfrac{A(R) - \mathrm{Re}(f)(0)}{R^n}$

② $d > 0$, $A(R) = O(R^d) \Rightarrow f$ polynomiale deg $\leq d$.

DÉMO

: à l'oral.
: écrit au tableau.
: pour comprendre.

X, Y : indé à val ds $\mathbb{N}$.

On s'intéresse à des lois de VA à val ds $\mathbb{N}$: outil privilégié : fonct géné

$Z := X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. $\forall |z| \leq 1$, $G_Z(z) := \mathbb{E}(z^Z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z=n) z^n = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} =: e^{\lambda(z-1)}$

déf valable $\forall$ VA à val ds $\mathbb{N}$. Reco. exp

BUT : ĉ G_X caract loi, mq G_X et G_Y de cette forme là.

Pr ça, on rappelle un lemme sur les fonct entières qui donne cond pr sa forme d'1 exp:

LEM 1: Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (entière), f ne s'annule pas, $\exists F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f = e^F$.

PLAN :

1. DSE de G_X G_Y sur $D(0,1)$
2. prolongement à $\mathbb{C}$ (PPA)
3. G_X, G_Y de la forme e^{az+a} (en utilisant LEM 1 et en précisant via un lemme qui vient ensuite)
4. $X, Y \sim \mathcal{P}$ (reconnaître les G_X)

1

Soit $|z| \leq 1$. Par indé : $G_Z(z) = G_X(z) G_Y(z)$

$$:= \sum_{n \geq 0} p_n z^n \sum_{n \geq 0} q_n z^n, \quad p_n := \mathbb{P}(X=n), q_n := \mathbb{P}(Y=n) \; \forall n.$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \right) z^n \quad \text{(produit de Cauchy).}$$

ĉ G [caract la loi] (PROBA) [(ou par unicité DSE)] (AUTRES)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (*)$$

les coeffs DSE de G_Z calculé + tôt

2 $\underline{\text{Mq } G_X, G_Y \text{ entières}}$: on veut que Rcv CV $= +\infty$, on va comparer les coeffs.

On a par $(*)$: $p_0 q_0 = e^{-\lambda}$ donc $p_0 \neq 0$, $q_0 \neq 0$

$\forall n \geq 1$, $\underbrace{e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}_{\text{Rcv CV } \infty} = c_n \geq \underbrace{\max(p_n q_0, p_0 q_n)}_{\text{on ne garde que les termes aux bornes de la } \Sigma}$

on veut comparer avec les coeffs p_n et q_n

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^n}{q_0\, n!}$

$p_n q_0 \leq \max$.

Par comparaison, G_X (et G_Y) est un ray. CV ∞.
théo sur les ray CV.

Par le PPA, $G_X(z)\,G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. En particulier, les fonct ne $\neq 0$
holom sur $\mathbb{C}$ connexe, coïncident sur $D(0,1)$ qui admet pt accu ds $\mathbb{C}$.

Ds H la suite, on s'interesse à X, mais c'est pareil pr Y.

(3) Par LEM1 $\exists F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $G_X = e^F$
$e^{\lambda(z-1)}$ s'annule pas donc G_X et G_Y non plus.
on veut préciser la forme de F.

Notons $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le dév. en série de Laurent de F.
BUT : F polyn de deg ≤ 1 ie $a_n = 0$ $\forall n \geq 2$

LEM2 : $|a_n| \leq 2\,\dfrac{A(R) - Re(F(0))}{R^n}$ où $A(R) = \sup_{|z|=R} Re(F(z))$. $R>0$.

On va mq pr $n \geq 2$, $a_n = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R$.

$\leq$ trig

$$e^{Re(F(z))} = |G_X(z)| \leq G_X(R) \leq G_X(R)\underbrace{G_Y(R)}_{\geq 1} \over 90 \leq \frac{e^{\lambda(R-1)}}{90} \leq c\,e^{\lambda R} \quad c>0.$$

Donc $Re(F(z)) \leq \log(c) + \lambda R$
Donc $A(R) \leq \log(c) + \lambda R$.

Par LEM2 $|a_n| = O\left(\dfrac{1}{R^{n-1}}\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ $\forall n \geq 2$.

On fait $R \to +\infty$ et on a $a_n = 0$ $\forall n \geq 2$.

Donc $F(z) = a_0 + a_1 z$
De m̂, $G(z) = b_0 + b_1 z$

④ On va diter les a, b, β, κ.

On a : • $1 = G_X(1) = e^{a_0} e^{a_1}$ donc $e^{-a} = e^{\alpha}$ donc $G_X(z) = e^{a_0(z-1)}$

mq $\alpha \in \mathbb{R}_+$:

. $G_X'(z) = \left(e^{a_0(z-1)}\right)' = a_0 e^{a_0(z-1)}$ donc $G_X'(1) = a_0$

. $G_X'(1) = \sum_{n \geq 0} n p_n = \mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}_+^*$ car X à val dans $\mathbb{N}$, non nulle

on peut dériver terme à terme car série entière ray cv ∞.

Donc $X \sim \mathcal{P}(a_0)$

De même $Y \sim \mathcal{P}(b_0)$ $b_0 > 0$.

PREUVE DE LEM 1 :

$\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$) donc admet une primitive $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$(e^{-g}f)' = (f' - \underbrace{g'f}_{= f' \text{ déf}})e^{-g} = 0.$

Donc $\exists \alpha \in \overset{f \neq 0}{\mathbb{C}^*}$, $f = \alpha e^{g}$.

Par surject exp sur $\mathbb{C}^*$, $\exists \beta \in \mathbb{C}$, $f = e^{g+\beta}$.

$F = g + \beta$ convient.

DÉMO DES RÉSULTATS ASSOCIÉS.

1.

Lem 6 (Hadamard)

- $A(R) := \sup_{|z|=R} \mathrm{Re}(f(z))$ $\quad f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = u + iv \quad \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

① $\forall n \geq 1,\ R>0,\quad |a_n| \leq 2\, \dfrac{A(R) - \mathrm{Re}(f)(0)}{R^n}$

② $d \geq 0,\ A(R) = O(R^d) \Rightarrow f$ polynomiale $\deg \leq d$.

Rq : pas psb avec $\leq$ Cauchy et lem : $\underbrace{|f(z)|}_{\text{module !}} \leq \Pi |z|^d \Rightarrow f$ poly

et on a accès slmt Re dans ce cas.

①. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{A}(\mathbb{C})$.

- $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

$\int_{C(0,R)} f(z)\,dz$

- $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(Re^{it})e^{-int}\,dt$

$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (Re^{it})^k e^{-int}\,dt$

CVN (SE)

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k R^k}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{it(k-n)}\,dt}_{2\pi\,\delta_{kn}}$

$= a_n R^n$

- $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(Re^{it})e^{int}\,dt$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k R^k}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{it(k+n)}\,dt}_{=0 \text{ car } k\geq 0 \neq -n.}$

$= 0$

On ajt conjug 2e à la 1re

Donc $a_n R^n + \underbrace{\overline{a_{-n} R^n}}_{=0}$

$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(f(Re^{it}) + \overline{f(Re^{it})}\right) e^{-int}\,dt$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\, e^{-int}\,dt$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(Re^{it})e^{-int}\,dt + 0$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(u(Re^{it}) - A(R)\right)e^{-int}\,dt$

avec $0 = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt \xrightarrow{2\pi\text{ pér.}} = \int_0^{2\pi} A(R)e^{-int}\,dt$

$\hookrightarrow$ const

Donc $|a_n| R^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\underbrace{A(R) - u(Re^{it})}_{\geq 0}) \, dt$

$$= 2A(R) - 2 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) (Re^{it})^0 \, dt}_{= u(0) \text{ par passage Re dans } (*)}$$

$$= 2(A(R) - u(0))$$

(2) sq $A(R) \leq CR^d$ $R \geq R_0$.

$$|a_n| \leq \frac{2A(R) - u(0)}{R^n} \leq \underbrace{\frac{2R^d - u(0)}{R^n}}_{\underset{R \to +\infty}{\sim} \frac{1}{R^{n-d}}} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0. \quad \forall n > d$$

3. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ Ω ouvert convexe. $\exists F : \Omega \to \mathbb{C}$, $F' = f$.

Lem : (Cauchy triangulaire)

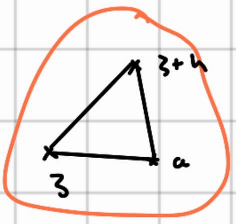
Δ triangle orienté positivement $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\int_{\partial \Delta} f = 0$

. soit $a \in \Omega$.

donc $[a,z] \subset \Omega$ $\forall z \in \Omega$ et f bien déf sur $[a,z]$, holom.

Posons $F : z \in \Omega \mapsto \int_{[a,z]} f(w)\,dw$ (bien déf car Ω convexe)

BUT : $F' = f$: ö Taux



$\forall z \in \Omega$, le triangle $\Delta(a,z,z+h) \subset \Omega$.

Donc $0 = \int_{\Delta(a,z,z+h)} f(z)\,dz = \int_{[a,z]} f(w)\,dw + \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw + \int_{[z+h,a]} f(w)\,dw$

$= F(z) - F(z+h) + \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw.$

Donc $\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\,dw$

$\hookrightarrow$ long $= h$: centrer $f(z)$.

soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ tq $|w - z| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| \leq \varepsilon$ (f conti sur compact $\Rightarrow$ uc)

Donc $0 < |h| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{|h|} |h| = \varepsilon.$

Donc $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $F'(z) = f(z)$